



KTH Matematik

Partiella differentialekvationer för ME SF1648 och K SF1641

Tentamen tisdag 2008-03-11, kl 08⁰⁰ – 13⁰⁰

Hjälpmedel: BETA Mathematics Handbook.

Räknedosa utan program.

Obs 1: Uppgifterna är ordnade varken kurskronologiskt eller efter svårighetsgrad.

Obs 2: Behandla inte mer än en uppgift per blad.
Varje steg i lösningen skall motiveras.
Bristfällig motivering kan ge poängavdrag.
Skriv namn och personnummer på varje inlämnat ark.
Fyll i antalet inlämnade ark på omslaget.

Tentamen består av fem uppgifter, vilka sammanlagd ger 25 poäng.
Efter tentans slut publiceras ett lösningsförslag på nätet.

Ansvarig: Franz J Čech

1) Bestäm med hjälp av potensserieansats av typen

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den s k Frobenius's metoden, där r är ett obestämt tal, två linjärt oberoende lösningar kring $x = 0$, till ekvationen

$$9x^2 y'' + 9x^2 y' + 2y = 0$$

Det räcker att ta med de fyra första termerna skilda från noll i vardera lösningen.

- 2) Temperaturen i en tunn stav är $u = u(x, t)$; utanför är temperaturen 0. Staven ligger på x-axeln med ändpunkter i $x = 0$ och $x = 2$.

Då gäller

$$u_t(x, t) = ku_{xx}(x, t) - hu(x, t) \quad 0 < x < 2, t > 0$$

där k och h är positiva konstanter. Antag att

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \left(1 + 4 \cos \frac{3\pi x}{2}\right) \sin \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2. \end{aligned}$$

Bestäm $u(x, t)$. (Ledning: Sätt $u(x, t) = e^{-ht}v(x, t)$.)

- 3) Sök den stationära temperaturfördelningen $u = u(x, y)$, d v s lös

$$\text{PDE: } u_{xx} + u_{yy} = 0$$

i plattan $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ med randvillkoren

$$\begin{aligned} \text{RV1: } u(0, y) &= 0, & \text{RV2: } u(1, y) &= 1 - \cos 2\pi y \\ \text{RV3: } u_y(x, 0) &= 0, & \text{RV4: } u_y(x, 1) &= 0. \end{aligned}$$

-
- 4) En stav med längden L hålls vid en konstant temperatur u_0 vid ändarna $x = 0, x = L$. Om stavens begynnelsestemperatur är $u(x, 0) = f(x)$ lös begynnelse/randvärdesproblemet för temperaturen $u(x, t)$ med lämplig transform.

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &= u_t(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = u_0 \\ u(x, 0) &= f(x) = u_0 + u_0 \sin \frac{x\pi}{L} \end{aligned}$$

-
- 5) Bestäm jämviktstemperaturen $u(\rho, z)$ av en homogen cylinder med radien $\rho = 1$ och höjden $z = 2$ genom att studera Laplace-ekvationen $\nabla^2 u = 0$ i cylinderkoordinater. Antag att temperaturen inte beror på vinkeln θ , att temperaturen på mantelytan och på undersidan är noll och att temperaturfördelningen på ovensidan, $z = 2$, är $f(\rho) = 100J_0(\rho)$. Dessutom vet vi att $u(0, z)$ är begränsad.
-

Lycka till!

Franz J